

No.2 非可算集合

この回のゴール

- 濃度の大小 $|A| \leq |B|$ を単射で定義し、ベルンシュタインの定理を使って対等性を示せる。
- 実数全体 $\mathbb{R}$ が可算でないことを、区間縮小法を使って証明できる。
- 区間, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ がすべて同じ濃度（連続体濃度）であることを説明できる。
- 濃度の議論から、超越数が存在することを示せる。

■ 1. 濃度の大小

No.1 では、可算集合がとても多いことを見た。 $\mathbb{Z}$ も $\mathbb{Q}$ も $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ も、濃度は $\mathbb{N}$ と同じであった。では、可算でない無限集合はあるのだろうか。それを考えるために、まず濃度の「大小」を定める。

定義 1 濃度の大小

集合 A から B への単射が存在するとき、 $|A| \leq |B|$ と書く。 $|A| \leq |B|$ かつ $|A| \neq |B|$ （全単射は存在しない）のとき、 $|A| < |B|$ と書く。

有限集合なら、第2章 No.2 定理2 (1) より、これは要素の個数の大小と一致する。 $A \subset B$ なら包含写像が単射なので $|A| \leq |B|$ である。たとえば $|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{R}|$ 。

$\leq$ という記号を使う以上、「 $|A| \leq |B|$ かつ $|B| \leq |A|$ ならば $|A| = |B|$ 」が成り立ってほしい。これは当たり前ではない（単射が2つあるだけで、全単射は手元にない）が、次の定理が保証してくれる。

定理 1 ベルンシュタインの定理

単射 $f: A \rightarrow B$ と単射 $g: B \rightarrow A$ が存在するならば、 A と B は対等である。

（カントール–ベルンシュタインの定理、シュレーダー–ベルンシュタインの定理とも呼ばれる。）

【証明】 $C_0 = A \setminus g(B)$ (g の矢印が来ない A の要素) とし、 $C_{n+1} = g(f(C_n))$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) と定め、 $C = \bigcup_{n \geq 0} C_n$ とおく。 $a \notin C$ なら $a \notin C_0$ 、つまり $a \in g(B)$ なので、 g が単射であることから $g(b) = a$ となる b がただ1つある。これを $g^{-1}(a)$ と書く。

$$h: A \rightarrow B, \quad h(a) = \begin{cases} f(a) & (a \in C) \\ g^{-1}(a) & (a \notin C) \end{cases}$$

が全単射であることを示す。

単射: $h(a) = h(a')$ とする。 a, a' がともに C に属すれば f の単射性から、ともに属さなければ g^{-1} の単射性から $a = a'$ 。 $a \in C$, $a' \notin C$ とすると、 $f(a) = g^{-1}(a')$ より $a' = g(f(a))$ 。 $a \in C_n$ とすると $a' \in g(f(C_n)) = C_{n+1} \subset C$ となり矛盾する。

全射: $b \in B$ をとる。 $g(b) \notin C$ なら $h(g(b)) = g^{-1}(g(b)) = b$ 。 $g(b) \in C$ なら、 $g(b) \in g(B)$ より $g(b) \notin C_0$ なので、ある n で $g(b) \in C_{n+1} = g(f(C_n))$ 。つまり $g(b) = g(f(a))$ ($a \in C_n$) で、 g は単射なので $b = f(a) = h(a)$ 。 $\square$

証明のアイデアは、「 g の矢印が来ない要素」から出発して f, g を交互にたどった要素 (C) では f を使い、それ以外では g を逆にたどる、というものである。この定理のおかげで、対等を示すには、両向きの

単射を作れば十分になる．全単射を直接作るよりずっと楽なことが多い．

例題 1

閉区間 $[0, 1]$ と开区間 $(0, 1)$ は対等であることを示せ．

【解答】 包含写像 $(0, 1) \rightarrow [0, 1]$ は単射．また $[0, 1] \rightarrow (0, 1)$, $x \mapsto \frac{x+1}{3}$ は単射 (値域は $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \subset (0, 1)$)．ベルンシュタインの定理より $[0, 1] \sim (0, 1)$ ．

端点の $0, 1$ を「つけるか外すか」は、濃度には影響しないのである．(全単射を具体的に作ることもできる．練習問題 2.)

定理 2

$a < b$ とするとき、区間 (a, b) , $[a, b]$, $[a, b)$, $(a, b]$, および $\mathbb{R}$ はすべて対等である．

【証明】 No.1 例 1 (4), (5) より $(a, b) \sim (0, 1) \sim (-1, 1) \sim \mathbb{R}$ ． I を $[a, b]$, $[a, b)$, $(a, b]$ のどれかとする．包含写像 $(a, b) \rightarrow I$ と、 $I \rightarrow (a, b)$ の単射 ($[a, b]$ を中央の $\frac{1}{3}$ の部分に縮める 1 次関数) があるので、ベルンシュタインの定理より $I \sim (a, b)$ ．□

■ 2. 実数全体は可算でない

定義 2 非可算集合

無限集合で、可算でないものを非可算集合という．

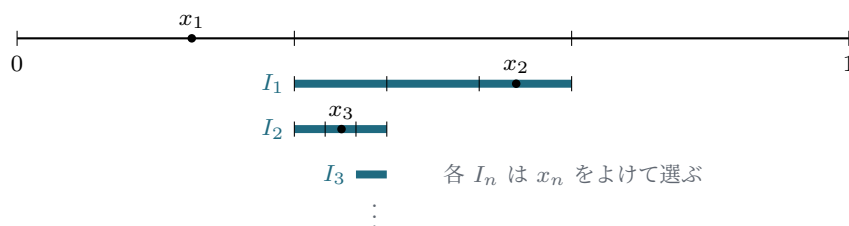
定理 3 カントール

$\mathbb{R}$ は非可算である．

【証明】 背理法で示す． $\mathbb{R}$ が可算だとすると、実数全体を $x_1, x_2, x_3, \dots$ と一列に並べられる．

- 閉区間 $I_0 = [0, 1]$ を 3 等分した 3 つの閉区間 $[0, \frac{1}{3}]$, $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$, $[\frac{2}{3}, 1]$ のうち、 x_1 を含まないものを 1 つ選んで I_1 とする．(1 つの点が 3 つすべてに含まれることはないので、選べる.)
- I_1 を 3 等分した閉区間のうち、 x_2 を含まないものを I_2 とする．
- 以下同様に、 I_{n-1} を 3 等分した閉区間のうち、 x_n を含まないものを I_n とする．

すると $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \dots$ で、 I_n の長さは $\frac{1}{3^n} \rightarrow 0$ ．区間縮小法 (分野「解析学」第 1 章 No.1) より、すべての I_n に共通に含まれる実数 c がある． c は $\mathbb{R}$ の要素なので、ある n で $c = x_n$ となるはずだが、 $x_n \notin I_n$ なのに $c \in I_n$ なので矛盾．□



注意

この証明では、実数の「隙間のなさ」(区間縮小法)を本質的に使っている。有理数だけで同じことをすると、区間の共通部分にあるはずの c が無理数になってしまい、矛盾が起きない。実際 $\mathbb{Q}$ は可算なので (No.1 定理 4), $\mathbb{Q}$ についてこの証明が通ってしまっては困るのである。

$\mathbb{R}$ の濃度を**連続体濃度**といい、 $\mathfrak{c}$ (フラクトゥール文字の c) で表す。 $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ より $\aleph_0 \leq \mathfrak{c}$ で、定理 3 より $\aleph_0 \neq \mathfrak{c}$. よって

$$\aleph_0 < \mathfrak{c}.$$

無限にも「大きさの違い」があることが、こうして初めて示された (1874 年)。

例 1

無理数全体の集合 $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ は非可算である。もし可算なら、 $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ は可算集合 2 つの和集合なので、No.1 定理 3 (4) より高々可算となり、定理 3 に矛盾する。有理数は「どこにでもある」が、濃度で見ると無理数のほうが圧倒的に多いのである。(実は $|\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}| = \mathfrak{c}$ であるが、証明は省略する。)

■ 3. 連続体濃度をもつ集合

定理 4

$\mathcal{P}(\mathbb{N})$, $\{0, 1\}$ の値をとる数列全体 $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{R}$ はすべて対等である。すなわち $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| = \mathfrak{c}$ 。

【証明】 $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \sim \{0, 1\}^{\mathbb{N}} : S \subset \mathbb{N}$ に、「 $n \in S$ なら第 n 項が 1, $n \notin S$ なら 0」となる数列を対応させれば全単射。(第 1 章 No.1 定理 3 で、部分集合と $0, 1$ の列を対応させたのと同じ考え方である。)

$|\{0, 1\}^{\mathbb{N}}| \leq |\mathbb{R}|$: 数列 $(d_1, d_2, \dots)$ に、10 進小数 $0.d_1d_2d_3\cdots$ を対応させる。数字が 0 と 1 だけの小数は、表し方が 1 通りなので (9 が並ぶ表し方は現れない)、違う数列は違う実数に行き、単射である。

$|\mathbb{R}| \leq |\{0, 1\}^{\mathbb{N}}|$: 定理 2 より $\mathbb{R} \sim (0, 1)$ なので、 $(0, 1)$ からの単射を作ればよい。 $x \in (0, 1)$ を 2 進小数で $x = 0.b_1b_2b_3\cdots_{(2)}$ と表す。ただし $0.0111\cdots_{(2)} = 0.1_{(2)}$ のように 2 通りに表せるときは、「1 が無限に続く」ほうは使わないと約束する。 $x \mapsto (b_1, b_2, \dots)$ は単射である。

ベルンシュタインの定理より $\{0, 1\}^{\mathbb{N}} \sim \mathbb{R}$ 。 □

定理 5

$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ は $\mathbb{R}$ と対等である。すなわち $|\mathbb{R}^2| = \mathfrak{c}$ 。

【証明】 定理 2 より $(0, 1)^2$ と $(0, 1)$ が対等であることを示せばよい ($\mathbb{R} \sim (0, 1)$ の全単射を 2 つ並べれば $\mathbb{R}^2 \sim (0, 1)^2$)。 $(0, 1) \rightarrow (0, 1)^2$, $x \mapsto (x, \frac{1}{2})$ は単射。逆向きは、 $x = 0.a_1a_2a_3\cdots$, $y = 0.b_1b_2b_3\cdots$ (9 が無限に続く表し方は使わない) に対して、数字を交互に並べた

$$(x, y) \mapsto 0.a_1b_1a_2b_2a_3b_3\cdots$$

が単射である (右辺から x, y の各桁が読み取れる)。右辺には 9 が無限に続くことはなく、0 でもないので、 $(0, 1)$ の要素の 10 進表示になっている。ベルンシュタインの定理より結論を得る。 □

直線と平面は、点の「個数」としては同じなのである。カントール自身も手紙に「私は見ているが、信じられない」と書いたという。次元のような「形」の違いは、濃度ではとらえられない。それをとらえるには、連続性 (位相) を考える必要がある (分野「位相空間論」第 2 章 No.2)。

注意

定理5の証明の「交互に並べる写像」は全射ではない．たとえば $0.1909090\cdots$ に行く (x, y) は $y = 0.999\cdots$ となるが、この表し方は除いたからである．全単射を直接作るのは面倒だが、ベルンシュタインの定理のおかげで「単射を2つ」作れば済む．

■ 4. 超越数の存在

代数的数（0でない整数係数多項式の根）でない数を**超越数**という．

定理 6

超越数である実数が存在する．しかも、実数の超越数全体は非可算である．

【証明】No.1 練習問題7より、代数的数全体は可算である．その中の実数全体を $\mathbb{A}$ とすると、 $\mathbb{A}$ は高々可算．実数の超越数全体 $\mathbb{R} \setminus \mathbb{A}$ が高々可算なら、 $\mathbb{R} = \mathbb{A} \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{A})$ が高々可算になり定理3に矛盾する．□

この証明は、超越数を1つも具体的に示さずに、その存在を示している． e や π が超越数であることは、それぞれ1873年（エルミート）、1882年（リンデマン）に、まったく別の難しい方法で示された．カントールの議論は、「ほとんどすべての実数は超越数である」ことを一瞬で教えてくれる．

コラム：連続体仮説

$\aleph_0 < \mathfrak{c}$ であることは分かった．では、その間の濃度をもつ集合、つまり $\aleph_0 < |A| < \mathfrak{c}$ となる $A \subset \mathbb{R}$ はあるだろうか．カントールは「ない」と予想した．これを**連続体仮説**という．ゲーデル（1940年）とコーエン（1963年）の研究によって、連続体仮説は、ふだんの数学の土台である公理系 ZFC から**は証明も反証もできない**ことが明らかになった．「正しいか正しくないか決められない」ことが数学的に証明されたのである．詳しくは分野「数理論理学」で学ぶ．

■ 練習問題

発展 のついた問題は、この回の内容から一歩踏み出した発展問題である．最初は飛ばして、ほかの問題が解けてから挑戦するとよい．

1. ベルンシュタインの定理を使って、次の2つの集合が対等であることを示せ．

$$(1) [0, 1] \text{ と } (0, 1) \quad (2) [0, 1] \text{ と } \mathbb{R} \quad (3) \mathbb{N} \text{ と } \mathbb{Q}$$

2. $h: [0, 1] \rightarrow (0, 1)$ を次のように定める． $h(0) = \frac{1}{2}$, $h\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+2}$ ($n \in \mathbb{N}$)、それ以外の x では $h(x) = x$ ． h が全単射であることを示せ．

3. B を非可算集合、 $A \subset B$ を高々可算な部分集合とする． $B \setminus A$ は非可算であることを示せ．

4. 自然数の値をとる数列全体 $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ は非可算であることを示せ．

5. $\mathbb{R}^3$ と $\mathbb{R}$ は対等であることを示せ．

6. 平面上の円全体の集合を $\mathcal{C}$ とする． $|\mathcal{C}| = \mathfrak{c}$ を示せ．（円は中心と半径で決まる．）

7. **発展**（考えてみよう）実数列全体 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ も $\mathbb{R}$ と対等であることを示せ．（ヒント： $\mathbb{R} \sim \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ と $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$ を使う．）

■ 練習問題の解答

- (1) 包含写像 $(0, 1) \rightarrow [0, 1]$ と, $[0, 1] \rightarrow (0, 1)$, $x \mapsto \frac{x+1}{3}$ はどちらも単射.

(2) $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ の包含写像と, $\mathbb{R} \rightarrow (0, 1) \subset [0, 1]$ の単射 (定理2の全単射 $\mathbb{R} \rightarrow (0, 1)$) がある.

(3) $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$ の包含写像と, $\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{N}$ の単射 (No.1 定理4の全単射 $\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{N}$) がある. ((3)はNo.1ですでに示しているが, ベルンシュタインの定理を使えば「 $\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{N}$ の単射」さえあればよい. たとえば既約分数 $\pm \frac{m}{n}$ に $2^m 3^n 5^{(1 \pm 1)/2}$, 0に1を対応させれば単射である.)
- $D = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} = \{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$ とすると, h は D を $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$ に1対1に写し ($0 \mapsto \frac{1}{2}, 1 \mapsto \frac{1}{3}, \frac{1}{2} \mapsto \frac{1}{4}, \dots$), $[0, 1] \setminus D$ の要素は動かさない. $(0, 1) = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\} \cup ([0, 1] \setminus D)$ (互いに素) なので, h は全単射. No.1 のヒルベルトのホテルと同じく, 「部屋を1つずつずらして」端点0, 1の居場所を作っている.
- $B \setminus A$ が高々可算だとすると, $B = A \cup (B \setminus A)$ は高々可算集合2つの和集合なので, No.1 定理3 (4) より高々可算となり矛盾. ($A = \mathbb{Q}$, $B = \mathbb{R}$ とすれば, 例1 (無理数全体は非可算) になる.)
- $\{1, 2\}^{\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ で, $\{1, 2\}^{\mathbb{N}} \sim \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ (各項から1を引く) は定理4より非可算. $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ が高々可算なら, その部分集合 $\{1, 2\}^{\mathbb{N}}$ も高々可算になる (No.1 定理3 (1)) ので矛盾.
- 定理5より $\mathbb{R}^2 \sim \mathbb{R}$. よって $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \sim \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2 \sim \mathbb{R}$. ($f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ が全単射なら, $(p, z) \mapsto (f(p), z)$ が $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ の全単射.)
- 円に (中心 (a, b) , 半径 r) を対応させると, $\mathcal{C}$ と $\mathbb{R}^2 \times (0, \infty)$ の間の全単射になる. $\mathbb{R}^2 \times (0, \infty) \sim \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \sim \mathbb{R}^3 \sim \mathbb{R}$ (練習問題5) なので $|\mathcal{C}| = \mathfrak{c}$.
- 定理4より $\mathbb{R} \sim \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ なので, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \sim (\{0, 1\}^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$. $(\{0, 1\}^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$ の要素は「0, 1の列の列」, つまり $(m, n) \mapsto d_{m,n} \in \{0, 1\}$ という $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ 上の0, 1の配列と同じものなので, $(\{0, 1\}^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}} \sim \{0, 1\}^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}$. $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$ の全単射で添字をつけかえると $\{0, 1\}^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}} \sim \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \sim \mathbb{R}$. (実数の「列」をすべて集めても, 実数の「個数」と変わらないのである.)